

ĐỊNH NGHĨA TOÁN TỬ M-HESSIAN PHỨC TRONG LỚP HÀM M-ĐIỀU HÒA DƯỚI VỚI DỮ KIẾN BIÊN $E_m(f, \Omega)$

Nguyễn Văn Phú

Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Điện lực

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh toán tử m -Hessian phức xác định trên lớp các hàm m -điều hòa dưới với giá trị biên $E_m(f, \Omega)$.

Từ khóa: Hàm đa điều hòa dưới, hàm m -điều hòa dưới, toán tử Monge- Ampere phức, toán tử Hessian phức, lớp hàm.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Sự tồn tại của toán tử Monge – Ampere đóng vai trò trung tâm trong lý thuyết đa thể vị. E. Bedford và B. Taylor (xem [2], [3]) đã chỉ ra sự tồn tại của toán tử Monge-Ampere trên lớp các hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương với miền giá trị trong lớp các độ đo không âm. Tuy nhiên, một ví dụ của Kiselman (xem [8]) đã chỉ ra rằng không thể mở rộng toán tử Monge-Ampere tới toàn bộ tập các hàm đa điều hòa dưới tùy ý mà vẫn có miền giá trị trong lớp các độ đo không âm. Do đó, bài toán tìm miền xác định của toán tử Monge – Ampere thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Trong [5,6], U. Cegrell giới thiệu các lớp hàm không bị chặn địa phương $E_0(\Omega), E_n(\Omega), F(\Omega), F_n(\Omega), E(\Omega)$ mà trên đó toán tử Monge-Ampere vẫn xác định. Năm 2007, P. Ahag (xem [1]) đã chứng minh rằng toán tử Monge-Ampere vẫn xác định trên lớp các hàm $E(f)$. Gần đây, trong [4], Z. Blocki giới thiệu lớp các hàm m -điều hòa dưới bị chặn địa phương là mở rộng của lớp các hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương và toán tử m -Hessian phức (mở rộng của toán tử Monge – Ampere phức) xác định trên lớp các hàm m -điều hòa dưới bị chặn địa phương. Tiếp theo, trong [7], L. H. Chinh giới thiệu lớp các hàm m -điều hòa dưới không bị chặn địa phương $E_m^A(\Omega), F_m(\Omega), E_m(\Omega)$ mà toán tử m -Hessian vẫn xác định. Tiếp tục hướng nghiên cứu trên, trong bài báo này chúng tôi giới thiệu và chứng minh toán tử m -Hessian phức xác định trên lớp các hàm với giá trị biên $E_m(f, \Omega)$.

Bài báo được bố cục như sau: Trong mục 2, chúng tôi nhắc lại về lớp hàm đa điều hòa

dưới được đưa ra gần đây bởi U. Cegrell và lớp các hàm m -điều hòa dưới được giới thiệu bởi Z. Blocki và L. H. Chinh. Trong mục 3, chúng tôi trình bày kết quả chính của bài báo.

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM

Trước tiên, chúng tôi nhắc lại khái niệm hàm đa điều hòa dưới được giới thiệu bởi U. Cegrell trong [5,6] như sau.

Định nghĩa 2.1. Với Ω là miền siêu lõm trong $\mathbb{C}^n$, chúng ta kí hiệu

$$E_0 = E_0(\Omega) = \{\varphi \in PSH^-(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) :$$

$$\lim_{z \rightarrow \partial\Omega} \varphi(z) = 0, \int_{\Omega} (dd^c \varphi)^n < \infty\}.$$

$$F = F(\Omega) = \{\varphi \in PSH(\Omega) : \exists \varphi_j \in E_0(\Omega),$$

$$\varphi_j \downarrow \varphi \text{ trên } \Omega \text{ sao cho } \sup_j \int_{\Omega} (dd^c \varphi_j)^n < \infty\}.$$

$$E = E(\Omega) = \{\varphi \in PSH^-(\Omega) : \forall z_0 \in \Omega, \exists \omega \ni z_0,$$

$$\varphi_j \in E_0(\Omega), \varphi_j \downarrow \varphi \text{ trên } \omega \text{ sao cho}$$

$$\sup_j \int_{\omega} (dd^c \varphi_j)^n < \infty\}.$$

Trong [6] U. Cegrell đã chứng minh rằng $E(\Omega)$ là lớp lớn nhất mà trên đó toán tử Monge – Ampere xác định và liên tục dưới dãy giảm các hàm đa điều hòa dưới. Hơn nữa, nếu $u \in E$ và $K \Subset \Omega$ thì tồn tại hàm $u_K \in F$ sao cho $u = u_K$ trên K .

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại khái niệm hàm m -điều hòa dưới được giới thiệu bởi Z. Blocki trong [4] và L.H. Chinh trong [7]. Với mỗi $1 \leq m \leq n$, chúng ta kí hiệu

$$\hat{\Gamma}_m = \left\{ \eta \in \mathbb{C}_{(1,1)} : \eta \wedge \beta^{n-1} \geq 0, \dots, \right. \\ \left. \eta^m \wedge \beta^{n-m} \geq 0 \right\},$$

với $\mathbb{C}_{(1,1)}$ là kí hiệu của không gian

các $(1,1)$ dạng với hệ số hằng.

Định nghĩa 2.2. Hàm điều hòa dưới u trên tập con mở $\Omega \in \mathbb{C}^n$ được gọi là hàm m -điều hòa dưới nếu với mọi $\eta_1, \dots, \eta_{m-1} \in \hat{\Gamma}_m$ ta có bất đẳng thức sau theo nghĩa đồng

$$dd^c u \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \geq 0.$$

Tập tất cả các hàm m -điều hòa dưới trên kí hiệu là $SH_m(\Omega)$ và tập tất cả các hàm m -điều hòa dưới âm trên Ω kí hiệu là $SH_m^-(\Omega)$.

Nếu u là hàm trơn đến cấp 2 trên thì áp dụng Mệnh đề 3.1 trong [4] ta có u là hàm m -điều hòa dưới khi và chỉ khi $(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} \geq 0$ với mọi $k = 1, \dots, m$.

Định nghĩa 2.3.

Nếu $u_1, \dots, u_p \in SH_m(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega)$ thì toán tử Hessian phức $H_m(u_1, \dots, u_p)$ được định nghĩa như sau

$$H_m(u_1, \dots, u_p) = dd^c u_p \wedge \dots \wedge dd^c u_1 \wedge \beta^{n-m} \\ = dd^c (u_p dd^c u_{p-1} \wedge \dots \wedge dd^c u_1 \wedge \beta^{n-m}).$$

Trong [4], Z. Blocki đã chứng minh rằng $H_m(u_1, \dots, u_p)$ là một dòng dương đóng song bậc $(n-m+p, n-m+p)$ và liên tục dưới dãy giảm các hàm m -điều hòa dưới bị chặn địa phương.

Khi

$u_1 = u_2 = \dots = u_m = u \in SH_m(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega)$ thì độ đo Borel $H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ được xác định và gọi là toán tử m -Hessian phức của hàm u .

Dưới đây là các lớp hàm m -điều hòa dưới không nhất thiết bị chặn địa phương mà toán tử m -Hessian phức vẫn xác định được giới thiệu trong [7].

Định nghĩa 2.4. Với Ω là miền m -siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, chúng ta kí hiệu

$$E_m^0 = E_m^0(\Omega) = \{u \in SH_m^-(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) :$$

$$\lim_{z \rightarrow \partial\Omega} u(z) = 0, \int_{\Omega} H_m(u) < \infty\},$$

$$F_m = F_m(\Omega) = \{u \in SH_m^-(\Omega) : \exists E_m^0 \ni u_j \searrow u,$$

$$\sup_j \int_{\Omega} H_m(u_j) < \infty\},$$

$$E_m = E_m(\Omega) = \{\varphi \in SH_m^-(\Omega) : \forall z_0 \in \Omega,$$

$$\exists \omega \ni z_0, \varphi_j \in E_m^0(\Omega), \varphi_j \downarrow \varphi \text{ trên } \omega$$

$$\text{ sao cho } \sup_j \int_{\Omega} H_m(\varphi_j) < \infty\}.$$

Chú ý rằng khi $m=n$ thì các lớp hàm $E_m^0(\Omega), F_m(\Omega), E_m(\Omega)$ trùng tương ứng với các lớp hàm $E_0(\Omega), F(\Omega), E(\Omega)$ và

$$E_m = E_m(\Omega) = \{\varphi \in SH_m^-(\Omega) : \forall \omega \Subset \Omega,$$

$$\exists \psi \in F_m(\Omega) : \psi = \varphi \text{ trên } \omega\}.$$

3. TOÁN TỬ M -HESSIAN TRONG LỚP HÀM $E_m(f, \Omega)$

Giả sử Ω là miền m -siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, và f là hàm giá trị thực, liên tục trên $\partial\Omega$, μ là độ đo không âm trên Ω . Chúng ta định nghĩa bao $U_m(\mu, f)$ như sau:

$$U_m(\mu, f)(z) = \sup\{u(z) : u \in B_m(\mu, f)\}$$

ở đó

$$B_m(\mu, f) = \{v \in SH_m(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega) : \mu \leq H_m(v), \\ \limsup_{z \rightarrow \xi} v(z) \leq f(\xi), \forall \xi \in \partial\Omega\}.$$

Từ Định nghĩa, chúng ta có chính quy hóa nửa liên tục trên

$$U_m^*(\mu, f) \in B_m(\mu, f).$$

Thật vậy, theo Bổ đề Choquet, tồn tại một dãy hàm $u_j \in B_m(\mu, f)$, $j \in \mathbb{N}$ sao cho

$$U_m^*(\mu, f) = (\sup\{u_j\})^*$$

Do đó, ta có

$$U_m^*(\mu, f) \in SH_m(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega).$$

Dễ thấy

$$\limsup_{z \rightarrow \xi} U_m^*(\mu, f) \leq f(\xi), \forall \xi \in \partial\Omega.$$

Mặt khác, đặt

$$u^k = \max_{1 \leq j \leq k} u_j$$

thì chúng ta có

$$u^k \uparrow U_m^*(\mu, f)$$

hầu khắp nơi khi $k \rightarrow \infty$. Theo Định lý 2.10 trong [7] chúng ta có

$$H_m(u^k) \rightarrow H_m(U_m^*(\mu, f)).$$

Do đó ta có

$$H_m(U_m^*(\mu, f)) \geq \mu.$$

Điều đó cho chúng ta khẳng định

$$U_m^*(\mu, f) \in B_m(\mu, f).$$

Định nghĩa 3.1. Giả sử

$K \in \{E_m^0(\Omega), F_m(\Omega), E_m(\Omega)\}$ và $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn

$$\lim_{z \rightarrow \xi} U_m(0, f)(z) = f(\xi), \forall \xi \in \partial\Omega.$$

Hàm m -điều hòa u trên Ω thuộc lớp $K(f) = K(f, \Omega)$ nếu tồn tại một hàm $\varphi \in K$ sao cho

$$U_m(0, f) \geq u \geq \varphi + U_m(0, f).$$

Từ định nghĩa và tính chất của bao Perron – Bremermann chúng ta có

$$U_m(0, f) \in E_m^0(f) \cap C(\bar{\Omega}).$$

Dễ thấy, $E_m^0(f) \subset L^\infty(\Omega)$.

Chú ý rằng $K(0) = K$ và với hàm f cho trước, chúng ta có bao hàm thức sau

$$E_m^A(f) \subseteq F_m(f) \subseteq E_m(f).$$

Mệnh đề sau thể hiện mối liên hệ giữa lớp $E_m(f)$ và lớp E_m .

Mệnh đề 3.2. Chúng ta có các khẳng định sau đây

(i) Nếu $f \leq 0$ và $u \in E_m(f)$ thì ta có $u \in E_m$.

(ii) Nếu $u \in E_m(f)$ thì tồn tại một hằng số $c \leq 0$ thỏa mãn $u + c \in E_m$.

(iii) Nếu $u \in E_m$ thì tồn tại một hằng số $d \leq 0$ thỏa mãn $u + d \in E_m(f)$.

Chứng minh.

(i) Từ Định nghĩa 3.1 tồn tại hàm $\varphi \in E_m$ sao cho $u \geq \varphi + U_m(0, f)$. Để ý rằng $U_m(0, f) \in C(\Omega)$ nên

$$U_m(0, f) = U_m^*(0, f) \in B_m(0, f).$$

Do đó, nếu $f \leq 0$ thì ta có

$$U_m(0, f) \in SH_m^-(\Omega) \cap L^\infty(\bar{\Omega}) \in E_m(\Omega).$$

(ii) Từ Định nghĩa tồn tại hàm $\varphi \in E_m$ sao cho $u \geq \varphi + U_m(0, f)$. Do đó

$$u + c \geq \varphi + U_m(0, f) + c \geq \varphi + \min_{\Omega} U_m(0, f) + c.$$

Chọn c đủ nhỏ để $c + \min_{\Omega} U_m(0, f) \leq 0$.

(iii) Hàm

$$u - |\max_{\xi \in \partial\Omega} f(\xi)| \in E_m(f).$$

Nhận xét: Từ (ii) của Mệnh đề 3.2 chúng ta có thể định nghĩa toán tử m -Hessian trên lớp $E_m(f)$. Phần tiếp theo chúng tôi trình bày định nghĩa toán tử m -Hessian trên lớp $E_m(f)$ theo cách của Cegrell trong [5].

Định lý sau đây là một dạng mở rộng của Định lý 3.1 trong [7].

Định lý 3.3. Giả sử $u \in E_m(f)$. Khi đó tồn tại một dãy giảm các hàm $[u_j] \subset E_m^0(f)$ hội tụ điểm đến u khi j tiến tới $+\infty$.

Chứng minh:

Theo Định nghĩa chúng ta có $u \in SH_m(\Omega)$ và tồn tại một hàm $\varphi \in E_m(\Omega)$ thỏa mãn

$$U_m(0, f) \geq u \geq \varphi + U_m(0, f).$$

Theo Định lý 3.1 trong [7] tồn tại một dãy giảm các hàm $[\varphi_j] \subset E_m^0(\Omega)$ thỏa mãn φ_j hội tụ điểm đến hàm φ khi j tiến tới $+\infty$. Với mỗi j ta đặt

$$u_j = \max(u, \varphi_j + U_m(0, f)).$$

Khi đó kết hợp với (1) ta có u_j là dãy giảm các hàm m - điều hòa dưới hội tụ điểm đến hàm u khi j tiến tới $+\infty$.

Dễ thấy

$$U_m(0, f) \geq u_j \geq \varphi_j + U_m(0, f).$$

Do đó ta có $[u_j] \subset E_m^0(f)$.

Tiếp theo chúng tôi phát biểu và chứng minh Định lý chỉ ra sự tồn tại của toán tử m -Hessian trên lớp các hàm $E_m(f)$.

Định lý 3.4. Giả sử $[u_j] \subset E_m^0(f)$ là dãy giảm hội tụ điểm đến hàm $u \in E_m(f)$ khi j tiến tới $+\infty$. Khi đó $H_m(u_j)$ hội tụ yếu và độ đo giới hạn không phụ thuộc vào việc chọn dãy $[u_j]$.

Chứng minh:

Theo Định nghĩa chúng ta có $u \in SH_m(\Omega)$ và tồn tại một hàm $\varphi \in E_m(\Omega)$ thỏa mãn

$$U_m(0, f) \geq u \geq \varphi + U_m(0, f). \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát có thể giả sử rằng $\varphi < 0$ vì nếu $\varphi = 0$ thì ta có

$$u = U_m(0, f) \in SH_m(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

do đó chọn $u_j = U_m(0, f)$ với mọi j .

Chọn $K \subseteq \Omega, K \neq \emptyset$ là tập con compact tùy ý trong Ω .

Để ý rằng $U_m(0, f) \in C(\bar{\Omega})$ kết hợp với điều kiện $\varphi < 0$ chúng ta suy ra tồn tại một hằng số $c > 0$ sao cho

$$U_m(0, f) - \alpha > c\varphi \quad (2)$$

trên K , ở đó hằng số

$$\alpha = 0 \text{ khi } \max_{\xi \in \partial\Omega} f(\xi) \leq 0$$

và

$$\alpha = \max_{\xi \in \partial\Omega} f(\xi) \text{ khi } \max_{\xi \in \partial\Omega} f(\xi) > 0$$

Từ (1) và (2) chúng ta có

$$u - \alpha \geq (1+c)\varphi \quad (3)$$

Theo Định lý 3.1 trong [7] tồn tại một dãy giảm các hàm $[\varphi_j] \subset E_m^0(\Omega)$ thỏa mãn φ_j hội tụ điểm đến hàm φ khi j tiến tới $+\infty$. Với mỗi j ta đặt

$$v_j = \max(u_j - \alpha, (1+c)\varphi_j).$$

Để thấy $v_j \in E_m^0(\Omega)$ và dãy $[v_j]$ là dãy giảm hội tụ điểm đến hàm

$$\max(u - \alpha, (1+c)\varphi) \in E(\Omega).$$

khi j tiến tới $+\infty$.

Đề ý rằng từ (3) chúng ta có

$$\max(u - \alpha, (1+c)\varphi) = u - \alpha$$

trong một lân cận của K . Theo Định lý 3.11 trong [7] chúng ta có $H_m(v_j)$ hội tụ theo nghĩa *yếu của độ đo và giới hạn không phụ thuộc vào việc chọn dãy $[v_j]$. Do K chọn tùy ý nên ta có $H_m(u_j - \alpha)$ hội tụ *yếu. Từ đó ta có $H_m(u_j)$ là hội tụ *yếu và độ đo giới hạn không phụ thuộc vào việc chọn dãy $[u_j]$.

Nhận xét: Từ Định lý 3.3 chúng ta có nếu $u \in E_m(f)$ thì tồn tại một dãy giảm các hàm $[u_j] \subset E_m^0(f)$ hội tụ điểm đến u khi j tiến tới $+\infty$. Theo Định lý 3.4 chúng ta có $H_m(u_j)$ hội tụ *yếu và độ đo giới hạn không phụ thuộc vào việc chọn dãy $[u_j]$. Từ đó chúng ta nhận được Định lý 3.5 dưới đây về sự tồn tại của toán tử m -Hessian của hàm $u \in E_m(f)$.

Định lý 3.5. Giả sử $u \in E_m(f)$. Khi đó chúng ta Định nghĩa độ đo giới hạn trong Định lý 3.4 chính là toán tử m -Hessian của u và kí hiệu là $H_m(u)$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] P. Ahag, (2007), A Dirichlet Problem for the Complex Monge- Ampere operator in $F(f)$, Michigan Math. J, 55, 123-138.
- [2] E. Bedford and B. A. Taylor, (1982), A new capacity for plurisubharmonic functions, Acta Math, 149, no. 1-2, 1-40.
- [3] E. Bedford and B. A. Taylor, (1987), Fine topology, Silov boundary, and $(dd^c)^n$, J. Funct. Anal, 72 (2), 225-251.
- [4] Z. Blocki, (2005), Weak solutions to the complex Hessian equation, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 55, 1735-1756.
- [5] U. Cegrell, (1998), Pluricomplex energy, Acta Math, 180, 187-217.
- [6] U. Cegrell, (2004), The general definition of the complex Monge-Ampere operator, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 54, 159-179.
- [7] L. H. Chinh, (2015), A variational Approach to complex Hessian equations in $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl, 431, no. 1, 228-259.
- [8] C.O. Kiselman, (1984), Sur la definition de l'operateur de Monge – Ampere complexe, in Complex Analysis, Lectures Notes in Mathematics, Vol. 1094 (Springer, Berlin), pp. 139-150.

DEFINITION OF THE COMPLEX M- HESSIAN OPERATOR ON $E_m(f, \Omega)$

Nguyen Van Phu

Electric Power University

Abstract: In this article, we prove that the complex m - Hessian operator is well - defined on $E_m(f, \Omega)$.

Keywords: Plurisubharmonic functions, m -subharmonic functions, the complex Monge-Ampere operator, m - Hessian operator, a class of functions in $E_m(f, \Omega)$.

Ngày nhận bài: 01/01/2023. Ngày nhận đăng: 04/3/2023

Liên lạc: Nguyễn Văn Phú, e-mail: phunv@epu.edu.vn